# PRACTICA 2
## [Curso 2007-08]
## LABORATORIO DE CÁLCULO
## DERIVADAS. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS.

### 1.- Derivada de una función en un punto.

El estudio de la derivada de una función en un punto surge con el problema geométrico de la determinación de la tangente a una curva y del problema físico de la velocidad instantánea.

Una función es derivable en a si existe y es real el límite.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

**Ejercicio 1**.- Introducir con **Author** la función:

**F(x):= sin(x^2)**

1º Calcular la derivada de F(x) en **x=1**, para ello se realizaran los siguientes pasos:

- Introducir con **Author** la expresión **(F(1+h)-F(1))/h**.
- Con los comandos **Cálculo Limites** se calcula el límite de la expresión anterior cuando **h** tiende a **0**, obteniéndose la expresión: $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
- Con el comando **Simplificar** se obtiene el valor exacto de ese límite **2.Cos(1)**
- Con **Aproximar** se obtiene su valor aproximado, **1.08060**.
- Con lo que se concluye que **F′(1)=2.Cos(1)**, y en forma aproximada **1.08060**.

2º Realizar los mismos pasos para obtener que $F'(3)=6.\cos(9)$, $F'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

y en forma aproximada **-5.46677**, **1.25331**.

**Ejercicio 2**.- Introducir con **Author** la función:

$$g(x):=1+(x-2)^2\ \sin\frac{1}{x-2}$$

1º Al aparecer **(x-2)** en un denominador esta función no está definida en **x=2**.

- Si se calcula el límite de **g(x)** cuando **x** tiende a **2**, al simplificar se obtiene **1**. Esto permite definir de forma continua a la función en **x = 2** como **g(2)=1**.
- Si se introduce mediante **Author g(2)** y se simplifica se obtiene también **1**. **DERIVE** es capaz de calcular el valor del límite y a asignarlo a **g(2)**.

2º Para calcular la derivada de g(x) en **x=2** se realizaran los siguientes pasos:

- Introducir con **Author** la expresión **(g(2+h)-g(2))/h**
- Con los comandos **Cálculo Limites** se calcula el límite de la expresión anterior cuando **h** tiende a **0**, obteniéndose la expresión: $\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$
- Con el comando **Simplificar** se obtiene el valor del límite **0**. Con lo que se concluye que **g′(2)=0**

3º Realizar los mismos pasos que en 2º para comprobar que **g′(-1)=1.01821**

A veces no existe el límite anterior, pero si existen los límites laterales. En este caso se habla de derivadas laterales. La gráfica de la función presenta un "pico" en ese punto.

**Ejercicio 3**.- Introducir con **Author**: **m(x):= Abs(x)/(x^2+1)**

- Para evaluar **m′(0)** se introduce con **Author** la expresión

**(m(0+h)-m(0))/h**

- Al calcular su límite cuando **h→0** se obtiene la respuesta **±1**, que nos indica la existencia de límites laterales.
- Si se evalúa el límite por la derecha cuando h tiende a 0 de la expresión **(m(0+h)-m(0))/h**, se obtiene **1**. Si se evalúa el límite por la izquierda, se obtiene **-1**.

En esta situación no existe derivada, pero si derivadas laterales de la función en **0**.

**Ejercicio 4**.- Estudiar la derivabilidad de la función $l(x) := \sqrt[3]{x^2}$

(observación: introducirlo como x^(1/3 2))

Representar gráficamente, observar que dibuja la función para x>0. La considera como función compleja, hay que indicarle que se trata de una función de variable real.

- Para indicar que se trabaja con funciones reales de variable real se utilizan los comandos **Opciones > Ajustes de modo,** elegir **Rama compleja Real**.
- Introducir la expresión **(l(0+h)-l(0))/h**
- Al calcular el límite cuando **h→0** se obtiene **unit_circle.∞** lo que carece de sentido.
- Al calcular el límite cuando **h** tiende a **0** por la derecha se obtiene ∞. Al calcularlo por la izquierda se obtiene **-∞**

**Ejercicio 5**.- Estudiar la derivabilidad en **x=0** de la función $r(x) := \begin{cases} \cos(x) & \text{si} \quad x \le 0 \\ 1 - x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Introducir con **Author** la expresión que define la función.

**r(x) := cos(x)*chi(-inf,x,0) + (1-x)*chi(0,x,inf)**

Al ser una función definida a intervalos mediante la instrucción **CHI**, y **0** extremo de esos intervalos **DERIVE** no es capaz de calcular **r(0)**. Al observar la definición de la función se ve que **r(0) = Cos(0) = 1**.

1º Introducir la expresión $\frac{r(0+h) - r(0)}{h}$, al calcular su límite cuando **h→0** se obtiene **?**. Esto es debido a que no es capaz de calcular **r(0)**.

2º Para indicarle que **r(0)= 1**, seguir los siguientes pasos:

- Sobreiluminar en $\frac{r(0+h) - r(0)}{h}$ la subexpresión **r(0)**.
- Utilizar los comandos **Simplificar > Sustituir expresion** sobre la expresión $\frac{r(0+h) - r(0)}{h}$ .

Cuando aparezca **nuevo valor** se introduce **1**, que es el valor de **r(0)**. Con **<OK>** Obteniéndose **(r(0+h)-1)/h**

3º Calcular el límite cuando **h→0** se obtiene **?**.
- Calcular los límites laterales, para obtener **-1** si **h** tiende a **0** por la derecha y **0** si **h** tiende a **0** por la izquierda.

## 2.- Cálculo directo de la función derivada.

El cálculo de la función derivada en **DERIVE** puede hacerse de forma directa mediante los comandos **Cálculo Derivadas**, y sobreiluminando la expresión que se desea derivar, cuando es invocada solicita:

- La variable respecto de la cual se ha de calcular el límite (en este caso se acepta la opción por defecto **x**).
- El orden de derivación.

Si se quiere calcular la derivada de una función en un punto, se utilizan los comandos **Simplificar > Sustituir Variable**

**Ejercicio 6**.- Introducimos la expresión $u(x) := 2x\mathrm{Atan}(2x) + \mathrm{Ln}\left(\sqrt{1+4x^2}\right)$

Con **Cálculo Derivadas Simplificar** se obtiene la derivada $2Atan(2x) + \dfrac{8x}{4x^2+1}$

- Si se quiere calcular el valor de la derivada en **π/3**:
- Hacer **Simplificar > Sustituir variable** sobre la expresión obtenida, sustituyendo **x** por **π/3**. Con **Aproximar** se obtiene **3.80597**. Con lo que se concluye que **u'(π/3) = 3.80597**

**Ejercicio 7**.- Comprobar que

$$\left(Ln(x^2+3) + Sin(x)\right)' = Cos(x) + \frac{2x}{x^2+3}$$

$$\left(\mathrm{Ln}\left(\frac{2\mathrm{Tan}(x)+1}{\mathrm{Tan}(x)+2}\right)\right)' = \frac{3}{(2\mathrm{Cos}(x)+\mathrm{Sin}(x))(\mathrm{Cos}(x)+2\mathrm{Sin}(x))}$$

**Ejercicio 8**.- Calcular la derivada de la función **m(x):=Abs(x)/(1+x^2)**
- Introducir con **Author** la función **m(x):=Abs(x)/(1+x^2)**.
- Aplicar los comandos **Cálculo Derivadas** sobre la expresión anterior.
- Simplificar (**Simplificar**) para obtener la derivada $\dfrac{(1-x^2)\mathrm{Sig}(x)}{(1+x^2)^2}$. La expresión **Sig(x)** es la función signo de x, a los x positivos les asigna el valor **1** y a los x negativos el valor **-1**.
- Queda $m'(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2} & si \quad x<0 \\ \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$
- En **x = 0** se ha comprobado en el ejercicio 3 que no existía derivada.

**Ejercicio 9.-** Calcular la derivada de orden 7 de la función **x.e^x**.

Se obtiene **e^x(7+x)**

**3.- Interpretación geométrica de la derivada.**

Geométricamente, el valor del límite **f′(a)** representa la pendiente de la recta tangente a la curva **y = f(x)** en el punto **A(a,f(a))**. Esto nos permite calcular ese recta tangente mediante la ecuación:

**y - f(a) = f ′(a) * (x-a)**

En el siguiente ejercicio se definen instrucciones que nos dan la recta tangente y rectas secantes a una función dada en un punto dado.

**Ejercicio 10.-** 1º Introducir mediante **Author** las siguientes expresiones

**EVAL(u, a) := ITERATE(u, x, a, 1)**

nos devuelve el valor de **u(a)**.

**DER(u) := DIF(u, x, 1)**

nos devuelve la función derivada de u(x).

**PENDTAN(u, a) := EVAL(DER(u), a)**

nos devuelve el valor de la derivada de la función u(x) en x = a.

**TANG(u, a) := y - EVAL(u, a) = PENDTAN(u, a) * (x - a)**

nos devuelve la recta tangente a y = u(x) en x = a

Observación: En el archivo **DIF_APPS.MTH** está definida la instrucción **TANGENT(y, x, $x_0$ )** que define la recta tangente de y = y(x) en x = $x_0$. Este fichero se puede cargar con **File Load Utility**

2º Introducir mediante **Author** las siguientes expresiones

**PENDSEC(u, a, b) := (EVAL(u, a) - EVAL(u, b)) / (a - b)**

nos devuelve la pendiente de la recta que pasa por los puntos **(a, u(a)), (b, u(b))**.

**LINEA(u, a, b) := y = EVAL(u, a) + PENDSEC(u, a, b) * (x - a)**

nos devuelve la recta que una los puntos **(a, u(a)), (b, u(b))**.

**SECANT(u, a, s) := [VECTOR(LINEA(u, a, b), b, a+6*s, a+s, -s)]**

nos devuelve 6 rectas secantes.

**SECANTES(u, a, s, n) := [VECTOR(LINEA(u, a, b), b, a+n*s, a+s, -s)]**

nos devuelve n rectas secantes

**Ejercicio 11**.-

1º Calcular la ecuación de la recta tangente a **f(x):=sin(x^2)** en **x=1**.

- En el ejercicio 1 se ha calculado **f′(1)=2.Cos(1)**.
- Introducir con **Author** y **Simplificar f(1)** para obtener **Sin(1)**
- Introducir con **Author** la ecuación que define la recta tangente

**y - Sin(1) = 2.Cos(1) * (x-1)**

- Aproximar (**Aproximar**) esa expresión **y – 0.841470 = 1.08060*(x-1)**
- También se puede hacer utilizando la instrucción definida en el ejercicio 10. Introducir (**Author**) y simplificar **TANG(f(x), 1)**
- Introducir con **Author** las coordenadas del punto de abcisa 1, **[1,f(1)]** . Al simplificar se obtiene [1,sin(1)]. Representar gráficamente la función, la recta tangente y el punto.

En la pantalla 2D mover la cruz al punto [1, sin(1)] con **Move x:1 y:Sin(1)**, centrar (**Center**) y hacer dos veces **F9**.

2º Introducir mediante **Author** la expresión **SECANT(f(x), 1, 0.1)**, aproximarla con **Aproximar**. Representar con **Plot** la expresión obtenida.

Introducir mediante **Author** la expresión **SECANT(f(x), 1, -0.1)**, aproximarla con **Aproximar**.

Representar con **Plot** la expresión obtenida.

**Ejercicio 12.-** Seguir el mismo proceso anterior para ver como 12 rectas secantes en **[1.5, Sin(1.5^2)]** se aproximan a la recta tangente en ese punto.

**Ejercicio 13**.- Escribir la ecuación de la recta tangente a $g(x):=1+(x-2)^2\sin\frac{1}{x-2}$ en **x = 2** y en **x = -2**.

Para calcular la recta tangente en x = 2

- En el ejercicio 2 se ha calculado que **g'(2) = 0**, y **g(2) =1**
- Introducir con **Author** la ecuación que define la recta tangente **y – 1 = 0 * (x-2)**

Observar que no se puede utilizar **TANG(g(x),2)** pues **DERIVE** no es capaz de calcular directamente g'(2)

Para calcular la recta tangente en x = -2 basta introducir y simplificar **TANG(g(x), -2)**, se obtiene **y+2.95845 = 1.01031 (x+2)**

**Ejercicio 14.-** Siguiendo el mismo proceso calcular y representar gráficamente la recta tangente y varias rectas secantes a y = u(x) en x = π/3, siendo $u(x):=2x\text{Atan}(2x)+\text{Ln}\left(\sqrt{1+4x^2}\right)$

**Ejercicio 15**.- Introducir la función **m(x):=Abs(x)/(x^2+1)**.

1º Calcular la recta tangente y varias rectas secantes a la curva **y = m(x)** en **x = -3/4**.

- Introducir y simplificar **TANG(m(x), -3/4)** se obtiene **y - 12/25 = -28(4x+3)/625**
- Introducir y simplificar **SECANT(m(x),-3/4,0.1)**
- Introducir y simplificar **SECANT(m(x),-3/4,-0.1)**

Representar gráficamente, junto con el punto **[-3/4,m(-3/4)]**

**Ejercicio 16.-** Calcular la recta tangente y varias rectas secantes a la curva **y = m(x)** en **x = 0**

Introducir y simplificar **[0,m(0)]**

Al hacer **Cálculo Derivadas** sobre **m(x)** se obtiene $\frac{(1-x^2)\text{Sig}(x)}{(1+x^2)^2}$, expresión que en x=0 no tiene sentido. Si se calcula por la definicón se obtiene que existen derivada por la izquierda –1 y por la derecha 1. **y = ±x** representan los límites de las rectas secantes por la derecha y por la izquierda.

Introducir con **Author** la siguiente expresión **SECANT(m(x),0,0.2)**. Con **Simplificar** se obtiene:

$$\left[\frac{25x}{61},\frac{x}{2},\frac{25x}{41},\frac{25x}{34},\frac{25x}{29},\frac{25x}{26}\right]$$

Representar gráficamente, observar como se aproximan a **y = x** .

Introducir con **Author** la siguiente expresión **SECANT(m(x),0,-0.2)**, simplificar y representar gráficamente. Observar como se aproximan a **y =- x**.

**4.- Aplicaciones de la derivada. Extremos relativos y puntos de inflexión.**

El estudio del crecimiento y decrecimiento de una función se realiza a través de su derivada primera. El estudio de la concavidad y convexidad de una función se hace a través de su segunda derivada.

**Ejercicio 17**.- Introducir con **Author** la función $f(x) := \dfrac{1}{x-1} + x$

1º Para encontrar los extremos se trabaja con la primera derivada .

Calcular la función derivada f′(x) con **Cálculo Derivadas** $\dfrac{\mathrm{x}.(\mathrm{x}-2)}{(\mathrm{x}-1)^2}$.

Buscar los puntos en los que se anula con el comando **soLve**, obtenemos **x=2**, **x=0**, estos son los posibles extremos relativos. Considerar los intervalos determinados por estos puntos y **x=1** que es el punto de discontinuidad.

Veamos el proceso para el intervalo **(-∞,0)**: Elegir **-1** ∈ **(∞,0)**.

Hacer **Simplificar > Sustitución Variable** sobre la expresión $\dfrac{\mathrm{x}.(\mathrm{x}-2)}{(\mathrm{x}-1)^2}$, cambiando **x** por **-1**

Aproximar (**Aproximar**) el resultado, se obtiene **0.75**. Interesa sólo el signo positivo.

Se concluye que en el intervalo **(-∞,0)** la función es creciente.

Veamos el proceso para el intervalo **(0,1)**: Elegir **0.5** ∈ **(∞,0)**.

Hacer **Simplificar > Variable Substitution** sobre la expresión $\dfrac{\mathrm{x}.(\mathrm{x}-2)}{(\mathrm{x}-1)^2}$, cambiando **x** por **0.5**

Aproximar (**aproX**) el resultado, se obtiene **–3**. Interesa sólo el signo negativo.

Se concluye que en el intervalo **(0,1)** la función es decreciente.

Análogamente obtener que es positiva en **(2,∞)**, y que es negativa en **(1,2)**.

La función es creciente en **(-∞,0),(2,∞)**, es decreciente en **(0,1),(1,2)**

2º De acuerdo con lo obtenido anteriormente en **x=0** hay un máximo y en **x=2** hay un mínimo relativos. Para encontrar las abcisas de esos puntos:

Introducir y simplificar **f(0)**, se obtiene **–1**

Introducir y simplificar **f(2)**, se obtiene **3**

Hay un máximo relativo en **(0,-1)** y un mínimo relativo en **(2,4)**. Introducir y representar los puntos **[0,-1]**, **[2,3]** y la función.

**Ejercicio 18.-** Para encontrar los puntos de inflexión de la función anterior se trabaja con la segunda derivada.

Calcular la función derivada f″(x) con **Cálculo Derivadas** $\dfrac{2}{(\mathrm{x}-1)^3}$,

Buscar los puntos en los que se anula con el comando **Resolver**, obtenemos **x=∞**, **x=-∞**, que no significa nada. No tiene puntos de inflexión.

4º Para estudiar la concavidad y convexidad considerar los intervalos determinados por los posibles puntos de inflexión (no se han obtenido) y el punto de discontinuidad **x=1**.

Elegir un punto en cada intervalo **(-∞,1), (1,∞)** y con **Simplificar > Sustituir variable** se sustituye en la derivada segunda, y se observa el signo obtenido. En **(-∞,1)** negativo, en **(1,∞)**

positivo.
Representar gráficamente y comparar resultados

**Ejercicio 19**.- Introducir la función $g(x) := x.\sqrt{x(4-x)}$ ,
Para determinar el dominio de definición resolver **x(4-x)≥0** con el comando **Resolver**. Se obtiene **0 ≤ x ≤ 4**. El dominio de la función dada es el intervalo **[0,4]**.

1º Para encontrar los extremos se trabaja con la primera derivada .
Con **Cálculo Derivadas** se obtiene $\dfrac{2.(x-3)\sqrt{x.(4-x)}}{x-4}$
Para calcular los puntos en los que se anula, hacer **Resolver** sobre la expresión anterior. Se obtiene **x=0**, **x=3**.
Se consideran los intervalos **(0,3)**, **(3,4)**. Análogamente al ejercicio anterior estudiar el signo de la derivada primera en estos intervalos.
En **(0,3) g'(x)** es positiva, aquí **g(x)** es creciente.
En **(3,4) g'(x)** es negativa, aquí **g(x)** es decreciente.

2º De acuerdo con lo obtenido en **x=3** hay un máximo relativo.
Introducir y simplificar **g(3)**, se obtiene **3√3**. En **(3, 3√3)** hay un máximo relativo.

3º Para calcular los puntos de inflexión se trabaja con la derivada segunda.
Calculamos la segunda derivada con **Cálculo Derivadas**, $\dfrac{2.(x^2-6x+6)\sqrt{x.(4-x)}}{x.(x-4)^2}$
Al calcular, con **Resolver**, los valores de x para los que se anula, se obtiene **3-√3**, **3+√3** al aproximarlos **1.26794**, **4.73205** no sirve al no pertenecer al dominio.
Elegimos un punto en cada intervalo **(0,1,2679)**, **(1.2679,4)**. Es positiva en **(0,1.2679)**, es negativa en **(1.2679,4)**.

4º El punto **x=3-√3** (en forma aproximada **1.26794**) es punto de inflexión.
Para obtener su ordenada introducir y aproximar **g(3-√3)**, se obtiene **2.35991**.
El único punto de inflexión es **(1.26794,2.35991)**

Realizar la gráfica de la función y comparar resultados.

**Ejercicio 20**.- Introducir la función **h(x):=** $\mathbf{x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 27x}$
Comprobar gráfica y analíticamente que los puntos **A(-3,0)**, **(-1.5,-5.0625)** son puntos de inflexión, en **(-0.75,-8.54296)** tiene un mínimo y que en **x = -3** se anula la primera derivada pero no es un extremo relativo.

**5.- Asíntotas.**

Como complemento a la construcción de la gráfica de una función vamos a realizar el estudio de las asíntotas. Una asíntota es una recta a la que se aproxima la curva en el infinito.

**Ejercicio 21**.- Calcular las asíntotas verticales de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$

Esta función tiende a ±∞ cuando el denominador se anula. Con **Resolver** se obtiene **x=3**, **x=2**. Las asíntotas verticales son **x=3, x=2**.
Representar gráficamente función y asíntotas.

**Ejercicio 22**.- Calcular las asíntotas horizontales de $y = \dfrac{Ln(x)}{x}$

Con **Cálculo Limites** cuando **x** tiende a ±∞ se obtiene que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{Ln(x)}{x} = 0$. La asíntota horizontal es **y = 0**.
Representar gráficamente función y asíntota.

**Ejercicio 23**.- Calcular las asíntotas oblicuas de la función $f(x) := \dfrac{x}{x-1} + 2x$

Aplicar el comando **Cálculo Limites** cuando **x** tiende a ±∞ sobre
1º $\dfrac{f(x)}{x}$ para hallar **m**, se obtiene **2**. 2º **f(x)-2x** para hallar **n**, se obtiene **1**.
La asíntota oblicua es **y=2x+1**. Representar gráficamente función y asíntota.

**Ejercicio 24.-** Calcular las asíntotas oblicuas de la función $g(x) := \sqrt{x^2 + x}$
Aplicar el comando **Cálculo Limites** cuando **x** tiende a **+** ∞ sobre
1º $\dfrac{g(x)}{x}$ para hallar **m**, se obtiene **1**. 2º **g(x)-x** para hallar **n**, se obtiene **1/2**.
Una asíntota oblicua es **y = x+1/2**.
Aplicar el comando **Cálculo Limites** cuando **x** tiende a **-** ∞ sobre
1º $\dfrac{g(x)}{x}$ para hallar **m**, se obtiene -**1**. 2º **g(x)+x** para hallar **n**, se obtiene **-1/2**.
Una asíntota oblicua es **y = -x-1/2.**
Representar gráficamente la función y las asíntotas

**Ejercicio 25**.- Dada la función $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} + x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ e^x . x^{1/3} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Obtener las asíntotas: **x=1, y=0, y=x+1**. Recordar que si hay asíntota horizontal a un "lado" no puede haber asíntota oblicua al mismo "lado".
Obtener máximos y mínimos : **(-0.33,-0.5), (0,0), (2,4)**
Obtener los puntos de inflexión: **(-0.91,-0.39)**

**6.- Representación gráfica.**

**Ejercicio 26.-** Hacer el estudio, representar gráficamente y comparar los resultados obtenidos analítica y gráficamente de las siguientes funciones

$y = \frac{x^3}{x^2 + x - 2}$, $y = x^4 - 2x^2$ , $y = Ln(x^2 - 6x+8)$, $y = x\, e^x$

**7.- Desarrollo de Taylor.**

**DERIVE** nos permite aproximar funciones mediante el polinomio de Taylor, con los comandos **Cálculo> Polinomios de Taylor**, que cuando es invocado solicita:

- La variable respecto a la que se ha de hacer el desarrollo.
- El grado del polinomio (**grado**) y el punto en el que se realiza el desarrollo (**punto**).
- Una vez introducidos todos los valores, tras haber pulsado **<Intro>** aparece en la pantalla una expresión, que utilizando el comando **Simplificar** nos da el desarrollo de la función hasta el grado indicado.

El polinomio de Taylor nos permite aproximar la función por el polinomio.

**Ejercicio 27**.- Obtener el desarrollo de Taylor de grado 5 en 0 para la función **ln(1+x)**. Aproximar **ln(1.1)** a través del polinomio obtenido.

Introducir con **Author** la expresión **f(x):=ln(1+x)**.

1º Para encontrar el polinomio de grado 5 hay que seguir los siguientes pasos:

Hacer **Cálculo> Polinomios de Taylor** sobre la expresión **f(x)**

Al preguntar la variable indicar **x**.

Al preguntar el grado (**grado**) se le indica **5**, al preguntar el punto (**punto**) se le indica **0**.

Nos devuelve la expresión **TAYLOR(f(x),x,0,5)**

Al simplificar se obtiene $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$

2º Para aproximar **ln(1.1)** tener en cuenta que **ln(1.1)=ln(1+0.1)**. Se quiere calcular el valor de la función en **x=0.1**.

Sustituir con **Simplificar > Sustituir Variable** en $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ , **x** por **0.1**.

Con **Aproximar** se obtiene **0.0953103**.

**Ejercicio 28**.- Obtener los desarrollos de Taylor de grados 3,4 en 0 para la función **ln(1+x)**. Aproximar **ln(1.1)** a través los polinomios obtenidos.

Realizar el mismo proceso para **n=4**, se obtiene **0.0953083**

Realizar el mismo proceso para **n=3**, se obtiene **0.0953333**

Aproximar **ln(1.1)** con el comando **Aproximar** y comparar con los resultados anteriores.

Representar gráficamente la función y los polinomios, observar su comportamiento cerca del punto **x=0.1**.

El resto n-ésimo del polinomio de Taylor de la función **f(x)** en un punto **a**, si la función admite derivadas hasta orden **n+1**, viene dado por la expresión $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t).(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ con 0<t<x

Su valor absoluto nos da una acotación para el error que se obtiene al tomar el valor de la función por el valor del polinomio en x.

**Ejercicio 29**.- Estimar el error que se produce al aproximar **ln(1.1)** por el valor **$P_3$(0.1)** obtenido en el ejercicio 24.

$$R_3(0.1) = \frac{f^{(4)}(t).(0.1)^4}{(4)!} \quad \text{con } 0 < t < 0.1$$

Con **Cálculo Derivadas** calculamos la derivada de orden **4** de **ln(1+x)**.

Obteniéndose $\dfrac{-6}{(x+1)^4}$. Se trata de acotar $\dfrac{6.(0.1)^4}{4!.(t+1)^4}$ con 0 < t <0.1.

Introducir con **Author** $\dfrac{6.(0.1)^4}{4!.(t+1)^4}$ *chi(0,t,0.1) y con **Plot** representar gráficamente.

Presionar 4 veces $\rightarrow\downarrow\uparrow\leftarrow$, cambiar la escala y rango de visión con **Seleccionar > Rango de la gráfica > Mínimo/Máximo**, cambiar **Vertical Mínimo: -10^(-4) Máximo: 10^(-4) Intervalos: 8**, observar que la función en el intervalo **(0,0.1)** es decreciente, está acotada por su valor en **0**. Situar la cruz sobre ese punto y observar en la línea inferior de la pantalla que corresponde a **y:2.5 $10^{-5}$**. Presionar varias veces $\rightarrow\downarrow\uparrow\leftarrow$, para comprobar que los valores de la cruz se estabilizan en **y:2.5 10^-5**.

La función está acotada por **2.5 10^-5**, ese es el error cometido.

Observar que **2.5 10^-5 < 5 10^-5 < 10^-4**.

**Ejercicio 30**.- Estimar el error que se produce al aproximar **ln(1.1)** por el valor **$P_5$(0.1)** obtenido en el ejercicio 27.

$$R_5(0.1) = \frac{f^{(6)}(t).(0.1)^6}{(6)!} \quad \text{con } 0 < t < 0.1$$

Con **Cálculo Derivadas** calculamos la derivada de orden **6** de **ln(1+x)**.

Obteniéndose $\dfrac{-120}{6!(x+1)^6}$. Se trata de acotar $\dfrac{120.(0.1)^6}{6!.(t+1)^6}$ con 0 < t < 0.1.

Introducir con **Author** $\dfrac{120.(0.1)^6}{6!.(t+1)^6}$ *chi(0,t,0.1) y con **Plot** representar gráficamente.

Presionar 4 veces el icono $\rightarrow\downarrow\uparrow\leftarrow$, cambiar la escala y rango de visión con **Seleccionar > Rango de la gráfica> Mínimo/Máximo** , cambiar **Vertical Mínimo: -0.5 Máximo: 0.5 Intervalos: 8, Vertical Mínimo: -10^(-3) Máximo: 10^(-3) Intervalos: 8,** observar que la función no se separa del eje de abscisas . Volver a cambiar **Vertical Mínimo: -10^(-6) Máximo: 10^(-6)** , ahora con observar que la función en el intervalo **(0,0.1)** es decreciente, está acotada por su valor en **0**. Situar la cruz sobre ese punto y observar en la línea inferior de la pantalla que corresponde a **y:1.640 $10^{-7}$**. Hacer varias veces ↓↑ y centrar ara comprobar que los valores de la cruz se estabilizan en **y:1.666 10^-7**.

La función está acotada por **1.666 10^-7**, ese es el error cometido.

Observar que **1.666 10^-7 < 0.1 10^-6 < 5 10^-7 < 10^-6**.

**Ejercicio 31**.- Dar un valor aproximado de $\sqrt{4.12}$ utilizando el polinomio de Taylor de quinto grado de la función $\sqrt{4+x}$, estimando el error cometido.

1º - Introducir con **Author f(x):=** $\sqrt{4+x}$

- Aplicar los comandos **Calculo > Polinomios de Taylor** sobre la función para obtener el polinomio, y simplificar. Se obtiene $\frac{7x^5}{131072} - \frac{5x^4}{16349} + \frac{x^3}{512} - \frac{x^2}{64} + \frac{x}{4} - 2$.

Estimar el valor del polinomio anterior, con **Simplificar > Sustituir Variable**, para **x=0.12** Al simplificar se obtiene **2.02977**.

2º - Para acotar **$R_5$(0.12)** se calcula la derivada de orden **6** de $\sqrt{4+x}$, obteniéndose $\frac{-945}{64.(x+4)^{11/2}}$. Se trata de acotar $\frac{-945}{64.(t+4)^{11/2}}$ **0<t<0.12**

Introducir con **Author** $\frac{945(0.12)^6}{6!.64.(t+4)^{11/2}}$ * chi(0,t,0.12) y con **Plot** representar.

Procediendo de forma análoga al ejemplo anterior se obtiene que **2.99 $10^{-11}$** es una cota para el error (Observar que también lo son **5 $10^{-11}$** y **10 $10^{-10}$** ) .

Con los comandos **Opciones > Ajustes de modo** cambiar **Precisión** a **13** dígitos. Calcular el valor de $\sqrt{4.12}$ con **Aproximar**. Comparar los resultados obtenidos.

Representar gráficamente la función y el polinomio.

**Ejercicio 32**.- Calcular **cos(1)** con un error menor que **$10^{-3}$**

Introducir con **Author f(x):= Cos(x)**

Se quiere encontrar **n** para el cual **$R_n$(1)** sea menor que **$10^{-3}$**.

Hay que calcular **$f^{(n)}$(x)**. Las derivadas de **Cos(x)** son ±Sin(x), ±Cos(x), funciones que están acotadas por **1**. Por tanto $|f^{(n+1)}(t)|<1$, para **0<t<1**

$$|R_n(1)| < \left|\frac{f^{(n+1)}(t).1^{n+1}}{(n+1)!}\right| < \frac{1}{(n+1)!}$$ , se quiere que sea menor que **$10^{-3}$**

Se trata de ver para que valor de n la expresión $\frac{1}{(n+1)!}$ es menor que $10^{-3}$

- Con **Simplificar > Sustituir Variable** se sustituye sucesivamente en $\frac{1}{(n+1)!}$ n por 1,2,3,4,5 para comprobar que es mayor que **$10^{-3}$**.

- Veamos el proceso para **n=5** (los restantes se hacen análogamente)

Hacer **Simplificar > Sustituir Variable** sobre **1/(n+1)!**, sustituir **n** por **5**, al aproximar se obtiene **0.00138888 =1.388888 $10^{-3}$ > $10^{-3}$**.

- Hacer **Simplificar > Sustituir Variable** sobre **1/(n+1)!**, sustituir **n** por **6**, al aproximar se obtiene **1.98412 $10^{-4}$ = 0.198412 $10^{-3}$ < $10^{-3}$**.

- Hay que aproximar **cos(x)** por el polinomio de Taylor de grado **6**. Al hallarlo calcular su

valor para **x=1**, se obtiene **0.540277**.
Aproximar el valor de **cos(1)** con el comando **aproximar** y comparar

**Ejercicio 33**.- Obtener una aproximación de $e^{1/2}$ con un error menor que $\mathbf{10^{-9}}$.
Se quiere encontrar **n** para el cual $\mathbf{R_n(1)}$ sea menor que $\mathbf{10^{-9}}$.
Introducir con **Author** $\mathbf{f(x):=e^x}$.
Hay que calcular $\mathbf{f^{(n)}(x)}$. La derivada n-ésima de $\mathbf{e^x}$ es $\mathbf{e^x}$.

$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \left|\frac{e^t}{(n+1)!}\right| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \quad \mathbf{0<t<1/2}$$

Hay que acotar $\mathbf{e^t}$ con **0<t<1/2**. Para ello representar $\mathbf{e^t}$ * **chi(0,x,1/2)** y observar que la gráfica está acotada por **2**

- Introducir con **Author** $\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{2}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Utilizar los comandos **Simplificar > Sustituir Variable** sobre la expresión anterior para hallar su valor en **n=8**, y **n= 9**
Para **n= 8** se obtiene $\mathbf{1.07645\ 10^{-8} > 10^{-9}}$
Para **n=9** se obtiene $\mathbf{5.38228\ 10^{-10} < 10^{-9}}$

- Con **Cálculo > Polinomios de Taylor** calcular el polinomio de Taylor de grado **9** para $\mathbf{e^x}$.

Cambiar con **Opciones > Ajustes de modo** cambiar **Precisión** el número de dígitos a 12. Al calcular el valor del polinomio para $\mathbf{x =}\frac{1}{2}$, se obtiene **1.64872127041**.

Aproximar $e^{1/2}$ con el comando **aproximar** y comparar.