


Práctica 1.
[curso 2007-2008]
LABORATORIO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES.

1.- Valor de una función en un punto x.


Con DERIVE es sumamente sencillo obtener el valor de una función en un punto utilizando los comandos **Simplificar** > **Sustituir Variables** y **Simplificar** -> **Aproximar**. (También se puede usar el icono  de la barra de herramientas en lugar de **Simplificar** -> **Aproximar**). Al utilizar el comando **Simplificar** -> **Aproximar** se está simplificando la expresión con precisión aproximada pero de forma temporal, ya que éstos comandos equivalen a simplificar las expresiones usando los comandos **Simplificar** -> **Normal** con precisión aproximada.

Ejercicio 1.- Introducir con **Introducir** la expresión $\ln(x^2+3)-\sin(\sin(x))$ y evaluarla en los puntos **-12.7, 0, 146.78 y 125000**.
Sobre la expresión introducir ir **Simplificar** > **Sustituir Variable**
En la pantalla que se abre esta sobreiluminada la variable **x**, en **nuevo valor** escribir **-12.7**
Elegir **Simplificar** para obtener **5.23408**
Seguir los mismos pasos para los otros tres valores.
Con lo que se obtiene: **5.23408, 1.09861, 9.33815 y 22.8445**

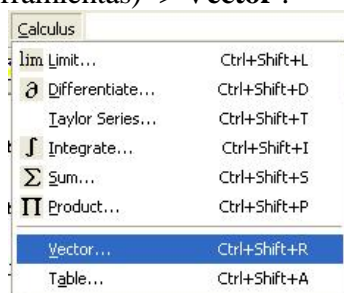
También es posible definir una función y asignarle una expresión de forma análoga a como se hace en Matemáticas. Para ello se utiliza el símbolo de asignación **:=**
Una vez utilizado de forma correcta, la expresión de la izquierda equivale a la de la derecha y puede representarla en cualquier expresión. Esta asignación se puede cambiar realizando una nueva.

En el ejercicio siguiente se ve como se puede hacer referencia a una expresión asociándole un nombre de función.

Ejercicio 2.- Utilizando las facilidades de edición introducir mediante **Introducir** la siguiente expresión: $f(x) := \ln(x^2+3)-\sin(\sin(x))$
(también se puede poner $f(x) := \#1$ (o el número que corresponda))
DERIVE interpreta la expresión como función haciendo aparecer la expresión:
$$f(x) := LN(x^2 + 3) - SIN(SIN(x))$$

Introducir desde Autor **f (-12.7)** y con **Simplificar** -> **Aproximar** o con el icono  se obtiene igual resultado que en el ejemplo anterior. Hacer lo mismo con los otros valores del ejercicio anterior.
Calcular los valores de **f (-125.7)** y **f (500)**. Se obtiene **9.70424** y **12.8649**, respectivamente.
Representar la función **f(x)** gráficamente para obtener su gráfica.

Se le puede decir a DERIVE que obtenga varios valores de la función para distintos valores de la variable x con la instrucción **VECTOR** directamente introducida desde **Introducir** o usando el comando **Cálculo** (de la barra de Herramientas) -> **Vector**.

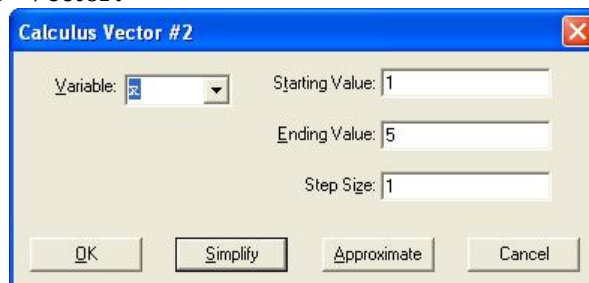


El comando **Calculus** -> **Vector** o la función **VECTOR** se usa para generar un vector de valores de una expresión evaluada en una secuencia de puntos. Este comando le permite elegir una variable e introducir su valor inicial, valor final y el incremento deseado.

La expresión **VECTOR**(u, k, n) equivale a generar un vector de n elementos obtenido al simplificar la expresión $u(k)$ incrementando la variable k desde 1 a n con incrementos de 1 .

La expresión **VECTOR**(u, k, m, n, s) equivale a generar un vector de $(n-m)/s+1$ elementos (redondeado hacia abajo) obtenido al simplificar la expresión $u(k)$ incrementando la variable k desde m a n con incrementos de s .

Ejercicio 3.- Así, si se quieren calcular los valores de la función $f(x)$ anterior en los puntos $x=1,2,3, 4$ y 5 , se introduciría desde **Introducir** la expresión: **VECTOR** ($f(x), x, 1, 5$) o mediante el comando **Introducir** -> **Vector**:



que tras aproximarla con **Cálculo** -> **Aproximar** aparecería de la forma:

[0.707863, 1.23621, 2.34471, 3.57835, 4.06237]

En cambio si se desean los valores de $f(x)$ desde 5 hasta 5.5 , de décima en décima, habría que introducir la expresión en la ventana de **Cálculo Vector** se introduciría: **valor inicial = 5; valor final = 5.5, salto = 0.1**

Con lo que, tras aplicar **Aproximar**, se obtendría:

[4.06237, 4.08437, 4.10076, 4.11077, 4.11350, 4.10800]

También se podría haber considerado $f(5 + 0.1 k)$, en este caso la variable es k , variando de 0 a 5 con un incremento de 1 **VECTOR** ($f(5 + 0.1 k), k, 0, 5$)

Además de lo anterior es posible obtener una tabla en la que aparezcan simultáneamente los valores de la variable independiente x y los de la función $f(x)$, para lo cual es necesario definir, por parte del usuario, las características de la tabla a partir de las posibilidades de la instrucción **VECTOR** tal como se realiza en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 4.- Se define una tabla de **6** valores, en los que aparezca el valor de la variable independiente **x** y de la función **f(x)** empezando en el valor **a** y en intervalos de amplitud **s**. (obsérvese el símbolo :=).

Introducir mediante **Introducir** la siguiente expresión:

Tabla(y, x, a, s) := VECTOR([x, y], x, a, a+5s, s)

También se puede hacer uso de los comandos **Introducir -> Definición de una función** y en la sección **Nombre de la función y argumentos** introducir: **Tabla(y,x,a,s)** y en sección **definición de la función** se introduce **VECTOR([x, y], x, a, a+5s, s)**

A continuación, para calcular los valores de **f(x)** entre **5** y **5.5** en cada décima, introducir mediante **Introducir** la expresión: **Tabla(f(x), x, 5, 0.1)**

Con lo cual en la pantalla aparece: **TABLA (F (x), x, 5, 0.1)**

Y al aproximar la expresión con **Simplificar -> Aproximar** se obtiene:

5	4.06237
5.1	4.08437
5.2	4.10076
5.3	4.11077
5.4	4.11350
5.5	4.10800

También es posible, en la definición de la instrucción **tabla**, introducir un parámetro para poder elegir el número de puntos que se quieren, en cada caso, y no limitarlo a uno determinado que no se puede controlar una vez definida. En el siguiente ejercicio se muestra este procedimiento.

Ejercicio 5.- Redefinir de nuevo la instrucción **tabla** de manera que se pueda decidir el número de puntos que se desean en cada caso mediante la introducción en **Introducir** de la expresión:

Tabla (y, x, a, b, s) := vector([x, y], x, a, a + b s, s)

Esta nueva asignación mediante := cancela la anterior.

Ahora, para obtener los valores de la función en los puntos entre **1** y **2** en intervalos de una décima, se introduce la expresión: **tabla(f(x), x, 1, 10, 0.1)**

así, tras invocar el comando **Simplificar -> Aproximar** se obtiene la tabla:

1	0.707863
1.1	0.725726
1.2	0.771324
1.3	0.813450
1.4	0.861103
1.5	0.913508
1.6	0.970127
1.7	1.03066
1.8	1.09503
1.9	1.16342
2	1.23621

Todo lo anterior muestra algunas de las técnicas posibles para obtener el valor de una determinada función en un punto x .

Sin embargo hay ocasiones en las que, debido a ciertas particularidades de las funciones, se producen situaciones en las que **DERIVE** no puede obtener una respuesta o responde de manera extraña. Tal y como se ve en el siguiente ejercicio:

Ejercicio 6.- Introducir la función $g(x) := \text{abs}(x) / (x(x^2 + 1))$ y calcular sus valores entre **-0.5** y **0.5** en cada décima mediante la expresión: **tabla (g(x), x, -0.5, 10, 0.1)** se observa que para los valores de x negativos se obtienen valores negativos de $g(x)$ próximos a -1 y para valores positivos de x se obtienen positivos de $g(x)$ próximos a 1 . Pero en $x = 0$, se obtiene ± 1 , expresión, que en este contexto no tiene ningún significado.

Con la idea de aclarar más esta situación calcular los valores de $g(x)$ en los puntos entre **-0.05** y **0.05** en intervalos de **0.01**. Para ello introducir **tabla (g(x), x, -0.05, 10, 0.01)** La situación persiste.

Ejercicio 7.- Otras situaciones en las que se pueden obtener resultados extraños son las que surgen con cálculos como los siguientes:

1°.- Definir $h(x) := \sin(1/x)$ y calcular sus valores en un conjunto de puntos que abarquen al **0**. Observar el resultado $\sin(\infty)$ que se obtiene.

2°.- Definir $l(x) := \sin(x)/x$ y calcular directamente $l(0)$, también se obtiene ? (**DERIVE** no sabe que decir).

3°.- Definir $m(x) := 1/((x-1)(x+1))$ y representar los valores de $m(x)$ en los alrededores de $x=1$. Se observa que para $x=1$ se obtiene $\pm\infty$, lo cual carece de sentido.

Para ello considerar **tabla (g(x), x, 0.5, 10, 0.1)** y **tabla (g(x), x, 0.95, 10, 0.01)**

Para entender lo que ocurre hacer una gráfica de cada una de las funciones $g(x)$, $h(x)$, $l(x)$ y $m(x)$.

2.- Límite de una función en un punto.

El ejercicio anterior revela situaciones anómalas en las que **DERIVE** proporciona respuestas extrañas.

Viendo con detalle cada una de las funciones y, **¡muy importante!**, los puntos en que se producen las anomalías, se encuentra que en todos ellos se llega a una situación en la que aparece una expresión que no tiene sentido.

Sin embargo esto sólo se produce en un punto concreto y en el resto de los puntos (alrededor del conflictivo) las funciones se evalúan sin problemas y se comportan incluso con una cadencia estable, tal y como se muestra en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 8.- Hallar los valores de la función $g(x) := \text{abs}(x)/(x(x^2+1))$ haciendo que **DERIVE** presente los resultados con **15** cifras decimales, e ignorando el valor $x=0$ (no interesa lo que pase en él).

1°.- Entre **0.1** y **1** en intervalos de amplitud **0.1**.

2°.- Hacer lo mismo pero entre **0.01** y **0.1** en intervalos de **0.01**.

Obsérvese que, no sólo, cuando los valores de x están muy próximos a **0** los de $g(x)$ están muy próximos a **1**, sino que, a medida que los valores de x están más cerca de **0** los de $g(x)$ se acercan a **1**.

3°.- Para asegurarse más de esta situación hacer que **DERIVE** calcule con **20** decimales y obtener los valores de $g(x)$ para x entre **0.001** y **0.01** en intervalos de amplitud **0.001**.

Obsérvese que la situación anterior se mantiene y contrastarlo con una gráfica de la función.

Este comportamiento de la función $g(x)$ se resume diciendo que el límite de la función $g(x)$ cuando x tiende a 0 por la derecha es igual a 1 . y se simboliza escribiendo: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$

Un tratamiento semejante se puede hacer para estudiar el comportamiento de la función $g(x)$ para valores negativos de x , siguiendo los pasos del siguiente ejercicio.

Ejercicio 9.- Hallar los valores de la función $g(x) := \text{abs}(x)/(x(x^2+1))$ haciendo que **DERIVE** presente los resultados con **15** cifras decimales, e ignorando el valor $x=0$ (no interesa lo que pase en él).

1°.- Entre -1 y -0.1 en intervalos de amplitud **0.1**.

2°.- Hacer lo mismo pero entre -0.1 y -0.01 en intervalos de **0.01**.

Obsérvese que, cuando los valores de x están muy próximos a 0 los de $g(x)$ están muy próximos a -1 . Es más, a medida que los valores de x están más cerca de 0 los de $g(x)$ se acercan a -1 .

3°.- Para asegurarse más de esta situación hacer que **DERIVE** calcule con **20** decimales y obtener los valores de $g(x)$ para x entre -0.01 y -0.001 en intervalos de amplitud **0.001**.

Obsérvese que la situación anterior se mantiene y contrastarlo con la gráfica de la función.

Este comportamiento de la función $g(x)$ se resume diciendo que el límite de la función $g(x)$ cuando x tiende a 0 por la izquierda es igual a -1 . y se simboliza escribiendo: $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1$

En este caso la función $g(x)$ tiene los dos límites laterales pero no coinciden, dice que la función $g(x)$ no tiene límite cuando x tiende a 0 .

Ejercicio 10.- Repetir los pasos de los ejercicios **8** y **9** (aprovechando las facilidades de edición de **DERIVE**) aplicados a la función $l(x) := \sin(x)/x$ en el punto $x=0$.

Obsérvese que se obtiene: $\lim_{x \rightarrow 0^+} l(x) = 1$ y también: $\lim_{x \rightarrow 0^-} l(x) = 1$

Hacer una gráfica de la función.

Esta situación de igualdad de los límites laterales se resume diciendo que el límite de la función $l(x)$ cuando x tiende a 0 es igual a 1 , y se expresa como: $\lim_{x \rightarrow 0} l(x) = 1$

Existen situaciones en las que no existe límite tal y como muestra el siguiente ejercicio:

Ejercicio 11.- Repetir los pasos de los ejercicios **8** y **9** aplicados a la función $h(x) := \sin(1/x)$ y en el punto $x=0$.

Obsérvese que se obtiene un comportamiento errático de los valores de $h(x)$ lo cual permite concluir la no existencia de límites laterales y, por tanto, la no existencia del límite global de $h(x)$ cuando x tiende a 0 .

Hacer una gráfica de la función e interpretarla.

Otra de las situaciones que se pueden presentar se produce con la función $m(x) := 1/((x-1)(x+1))$ tal y como se muestra en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 12.- Repetir los pasos de los ejercicios 8 y 9 aplicados a la función $m(x) := 1/((x-1)(x+1))$ en el punto $x=1$.

Se observa que, cuando x se acerca al valor 1 por la derecha (desde valores mayores que 1) el valor de la función crece más cuanto más cerca de 1 está el valor de x .

Este hecho se resume diciendo que el límite de $m(x)$ cuando x tiende a 1 por la derecha es **infinito** y se simboliza como: $\lim_{x \rightarrow 1^+} m(x) = +\infty$

En cambio, cuando x se acerca al valor 1 por la izquierda (desde valores menores que 1) el valor de la función decrece más cuanto más cerca de 1 está el valor de x .

Este hecho se resume diciendo que el límite de $m(x)$ cuando x tiende a 1 por la izquierda es **menos infinito** y se simboliza como: $\lim_{x \rightarrow 1^-} m(x) = -\infty$

Hacer una gráfica de la función e interpretarla.

En este caso anterior, como es lógico, no es posible hablar del límite de $m(x)$ cuando x tiende a 1.

3.- Continuidad de funciones.

En el apartado anterior se han calculado límites de funciones en puntos conflictivos y se han obtenido resultados diversos.

Sin embargo el límite de una función se puede tratar de calcular (luego existirá o no) en cualquier punto, sea éste conflictivo o no. Así en el siguiente ejercicio se calcula el límite en una situación de lo más normal.

Ejercicio 13.- Repetir los pasos de los ejercicios 8 y 9 aplicados a la función $p(x) := x^2 - 3x + 1$ en el punto $x=3$.

Obsérvese que:

Existe $\lim_{x \rightarrow 3^+} p(x) = 1$ y también $\lim_{x \rightarrow 3^-} p(x) = 1$ con lo cual $\lim_{x \rightarrow 3} p(x) = 1$

Hacer una gráfica de la función.

Además de lo anterior calcular el valor de $p(3)$ y observar que $p(3) = 1$

En este caso de la función $p(x)$ se da la siguiente situación, nueva hasta el momento:

1º.- Existe $\lim_{x \rightarrow 3} p(x) = 1$ 2º.- Existe $p(3) = 1$.

3º.- Los dos valores anteriores son iguales.

En tal caso se dice que la función $p(x)$ es continua en $x = 3$. Lo cual se simboliza mediante la expresión: $\lim_{x \rightarrow 3} p(x) = p(3)$

Se destaca el hecho de que para que una función sea continua en un punto se deben cumplir las tres condiciones anteriores.

Así la función: $g(x) = \text{abs}(x)/(x(x^2+1))$ no puede ser continua en $x=0$ ya que no existe su límite en ese punto (si se observa su gráfica se verá que la rama positiva y negativa de la misma se encuentran separadas en el punto $x = 0$)

Lo mismo ocurre con las funciones: $h(x) := \sin(1/x)$ en el punto $x = 0$, y $m(x) := 1/((x-1)(x+1))$ en el punto $x = 1$. Ninguna de ellas es continua, en dichos puntos, pues no tienen límite en ellos.

Sin embargo la función $l(x) := \sin(x)/x$ si tiene límite en $x = 0$ aunque no es continua por no tener un

valor que se pueda asignar a $l(0)$. En esta situación se podría definir como $l(0)$ el valor del límite de la función en dicho punto (esto es $l(0) = 1$) con lo que se resolvería el problema y la función sería continua. Es por esto que, a esta situación se le llama **discontinuidad evitable**.

Ejercicio 14.- Repetir el ejercicio anterior para comprobar que:

1°.- La función $g(x) := \text{abs}(x)/(x(x^2+1))$ es continua en $x = 1$;

2°.- La función $m(x) := 1/((x-1)(x+1))$ es continua en $x = 0$.

4.- Límites en el infinito.

Otra de las cuestiones importantes acerca de las funciones en Cálculo Infinitesimal es su comportamiento cuando el valor de la variable x crece (en cuyo caso se habla de límite de la función cuando x tiende a **infinito**), o decrece, (límite cuando x tiende a **menos infinito**) indefinidamente.

El comportamiento de las funciones en tales casos también se pueden estudiar mediante la instrucción **tabla** creada anteriormente indicándole unos valores elevados (positivos o negativos) para los parámetros a y s .

Ejercicio 15.- Establecer **15** dígitos de precisión en los resultados.

Construir la función $r(x) := (1 + 1/x)^x$ y estudiar su comportamiento cuando la variable x crece mediante la instrucción: **tabla (r(x), x, 10000, 10, 1000)**

con lo que se halla $r(x)$ para $x = 10000, 11000, \dots, 20000$.

Si se introduce la instrucción: **tabla (r(x), x, -10000, 10, -1000)**

Se obtienen los valores de $r(x)$ para $x = -10000, -11000, \dots, -20000$.

Si se observan los resultados obtenidos se detecta que estos tienden a estabilizarse y reproducir cada vez un número mayor de cifras decimales.

Ejercicio 16.- Para ver mejor el comportamiento de la función introducir:

tabla (r(x), x, 50000, 10, 5000) para valores positivos y

tabla (r(x), x, -50000, 10, -5000) para valores negativos.

Obsérvese que en ambos caso la estabilidad del resultado permanece y el número de cifras decimales que se repiten es cada vez mayor.

Hacer una gráfica y aumentarla varias veces para observar mejor el comportamiento de la función y la concordancia de los resultados numéricos y gráficos.

En estos casos cuando al aumentar el valor de la variable x el valor de la función tiende a estabilizarse en una cantidad m se dice que el límite de la función cuando x tiende a **mas infinito** es m , y se simboliza por: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$

En este caso: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2.71825$

De la misma forma cuando al disminuir el valor de la variable x el valor de la función tiende a estabilizarse en una cantidad n se dice que el límite de la función cuando x tiende a **menos infinito** es n , y se simboliza por: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = n$

En este caso: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2.71825$

En el caso de que las funciones no se aproximen a ningún valor, al crecer o decrecer la variable **x**, se dirá que son **divergentes**.

Ejercicio 17.- Calcular los siguientes límites infinitos contrastando los datos numéricos y gráficos.

1º.- Comprobar que: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^{10}$ es igual a **0**.

2º.- Comprobar que la función: $f(x) = \frac{3x^5 - x^2 + 1}{100x^4 + 30x^3 + 12}$ es divergente

cuando **x** tiende a **infinito** y a **menos infinito**.

3º.- Comprobar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{6x^3 + 1}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{6x^3 + 1}$ son **1/2**.

5.- Cálculo directo de límites.

El cálculo de límites en **DERIVE** puede hacerse de forma directa mediante los comandos **Cálculo Límites** sobre la función, que cuando es invocada aparece una pantalla que solicita:

- La variable respecto de la cual se ha de calcular el límite (en este caso se acepta la opción por defecto **x**).
- El punto en el que se calcula el límite (en el campo **punto**: en el que se debe poner **-inf** para menos infinito y **inf** para infinito)
- El tipo de límite que se desea calcular: por la izquierda, por la derecha o global (en el menú **Tendiendo por** : se elige entre **Derecha Izquierda Ambos**)
- Una vez introducidos todos los valores, tras haber pulsado **<Simplificar>** su valor numérico.

Ejercicio 18.- Utilizando los comandos **Cálculo Límite**, obtener los siguientes límites y compararlos con los hallados anteriormente:

1º.- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x(x^2 + 1)}$ 2º.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x(x^2 + 1)}$ 3º.- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

4º.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ 5º.- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)(x+1)}$ 6º.- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)(x+1)}$

7º.- $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 3x + 1$ 8º.- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

6.- Funciones definidas por intervalos.

Además de las funciones definidas de la manera habitual **Derive** admite las funciones definidas a trozos o por intervalos. Para ello se ha de utilizar la función definida internamente en el programa que se define como:

CHI (a,x,b) que vale **1** si $a < x < b$ y vale **0** si $x < a$ ó $b < x$, pero no está definida (lo que supone un problema) ni para $x=a$ ni para $x=b$.

Ejercicio 19.- Para ver la descripción que hace **DERIVE** de esta función buscar en ayuda **H (Help)**, elegir Buscar e introducir **CHI** .

Volver a la pantalla de **Algebra** y representar gráficamente las funciones:

CHI (-1, x, 1), CHI (-inf, x, 3), CHI (1, x, inf) y CHI (-inf, x, inf)

Ejercicio 20.- Así para introducir la función **q(x)** definida como:

$$q(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 5}{2x^2} & \text{si } x \in (-\infty, -1] \\ -3x & \text{si } x \in (-1, 1] \\ x^2 + x + 1 & \text{si } x \in (-1, \infty] \end{cases}$$

Se introduciría la expresión:

$$q(x) := (x^2+5)/(2x^2) \text{ Chi}(-\text{inf}, x, -1) + (-3x) \text{ Chi}(-1, x, 1) + (x^2+x+1) \text{ Chi}(1, x, \text{inf})$$

Hacer una gráfica de la función y observar su comportamiento. Sobre todo los puntos de contacto de los diferentes tramos.

En este momento se puede preguntar por el valor de la función **q(x)** en cualquier punto.

Hallar los valores de **q(-20)**, **q(0.5)** y **q(234)**, **q(-20)=0.50625**, se obtiene **0.50625**, **-1.5** y **54991**

En cambio si se intenta pedir el valor de la función en los puntos de contacto de los diferentes tramos **q(1)** y **q(-1)** **Derive** no sabe que responder y se obtiene ? (En este caso no es grave pues viendo la definición de la gráfica se ve fácilmente que: **q(-1) = 3** y **q(1) = -3**).

Sin embargo si es posible calcular el límite de la función **q(x)** cuando **x** tiende a **-1** y a **1**, pues el valor de la función en esos puntos es irrelevante (a efectos de cálculo del límite).

Para comprobar esto hallar los siguientes límites:

$$1^\circ.- \lim_{x \rightarrow -1} q(x) = 2^\circ.- \lim_{x \rightarrow -1^+} q(x) =$$

$$3^\circ.- \lim_{x \rightarrow -1^-} q(x) = 4^\circ.- \lim_{x \rightarrow 1} q(x) =$$

$$5^{\circ}\text{-} \lim_{x \rightarrow 1^+} q(x) = 6^{\circ}\text{-} \lim_{x \rightarrow 1^-} q(x) =$$

$$7^{\circ}\text{-} \lim_{x \rightarrow -20} q(x) = 8^{\circ}\text{-} \lim_{x \rightarrow 234} q(x) =$$

Contrastar estos resultados con la gráfica de $q(x)$.

Se observa que en los puntos $x=-20$, -1 y 234 existe el límite de la función $q(x)$ y además es igual su valor en dichos puntos: $q(-20)$, $q(-1)$ y $q(234)$, por lo tanto la función es **continua** en ellos.

En el punto $x=1$ existen los límites laterales pero no existe límite global, por tanto, aunque la función tiene un valor definido en ese punto, no es continua en $x=1$. Además esta discontinuidad no es del tipo evitable.

Por último, obsérvense, mediante la gráfica, los límites infinitos:

- a) Cuando x crece (tiende a **infinito**) la función también crece sin estabilizarse en ningún valor. Es decir, la función **diverge**.
- b) En cambio cuando x decrece (tiende a **menos infinito**) la función tiende a estabilizar su valor en **0.5** indicando que ese es su límite en esa situación.

Compruébese la autenticidad de estas apreciaciones sobre los límites infinitos verificando con **DERIVE** que:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = \infty \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = 0.5$$